On Lévy Processes for Option Pricing

Numerical Methods and Calibration to Index Options

Damien Deville

Relatore: Chiar.ma Prof.ssa Maria Cristina Recchioni

Università Politecnica delle Marche - *Facoltà di Economia "Giorgio Fuà"*

18 Aprile 2008

Indice

Il Modello di Black-Scholes

Dal 1973, un modello è diventato preponderante nella teoria del prezzaggio di opzione:

$\Rightarrow$ il modello di **Black-Scholes**.

Equazione Differenziale Stocastica di Black-Scholes

Parte deterministica

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Parte stocastica

ossia $S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$, dove W_t è un *moto Browniano* $\Rightarrow$ 2 ipotesi:

- La distribuzione dei log-rendimenti è **Normale**
- Il processo è **continuo**

Il Modello di Black-Scholes

Dal 1973, un modello è diventato preponderante nella teoria del prezzaggio di opzione:

$\Rightarrow$ il modello di **Black-Scholes**.

Equazione Differenziale Stocastica di Black-Scholes

Parte deterministica

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Parte stocastica

ossia $S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$, dove W_t è un *moto Browniano* $\Rightarrow$ 2 ipotesi:

- La distribuzione dei log-rendimenti è **Normale**
- Il processo è **continuo**

Il Modello di Black-Scholes

Dal 1973, un modello è diventato preponderante nella teoria del prezzaggio di opzione:

⇒ il modello di **Black-Scholes**.

Equazione Differenziale Stocastica di Black-Scholes

Parte deterministica

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Parte stocastica

ossia $S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$, dove W_t è un *moto Browniano* ⇒ 2 ipotesi:

- La distribuzione dei log-rendimenti è **Normale**
- Il processo è **continuo**

Il Modello di Black-Scholes

Dal 1973, un modello è diventato preponderante nella teoria del prezzaggio di opzione:

$\Rightarrow$ il modello di **Black-Scholes**.

Equazione Differenziale Stocastica di Black-Scholes

Parte deterministica

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

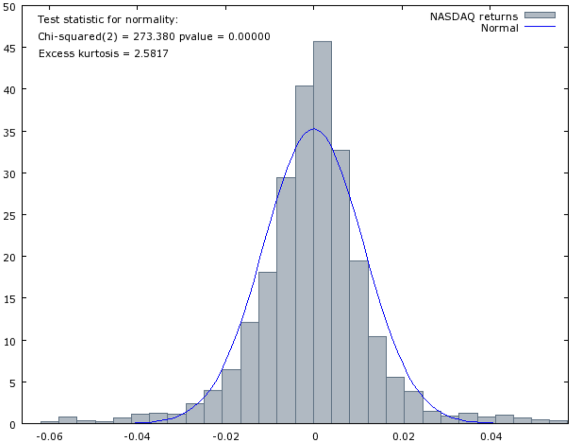
Parte stocastica

ossia $S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$, dove W_t è un *moto Browniano* $\Rightarrow$ 2 ipotesi:

- La distribuzione dei log-rendimenti è **Normale**
- Il processo è **continuo**

Distribuzione Leptocurtica dei Rendimenti

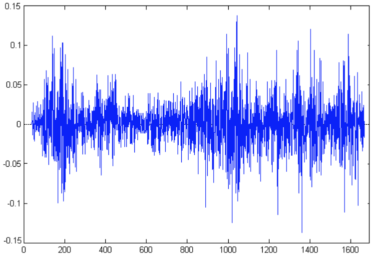
La distribuzione dei rendimenti giornalieri del NASDAQ ha code più "spesse" di una Normale $\Rightarrow$ presenza di eventi straordinari.



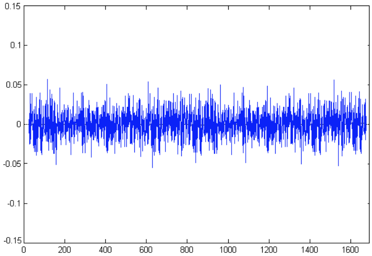
Confronto fra la distribuzione dei rendimenti del NASDAQ e una Normale

Volatility Clusters

I rendimenti del NASDAQ sono anche caratterizzati dalla presenza di *Volatility Clusters* $\Rightarrow$ successione di periodi di elevata volatilità seguiti da periodi di bassa volatilità.



Rendimenti giornalieri del NASDAQ (Nov. 1999 - Nov. 2006)

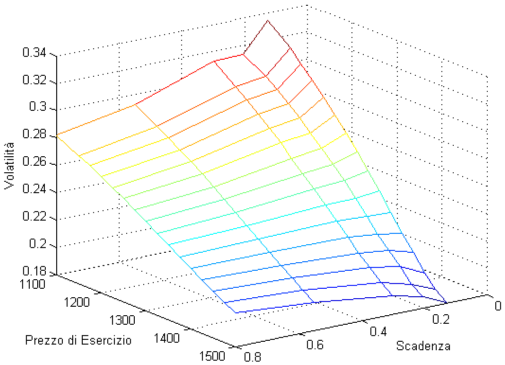


Rendimenti generati con il modello di Black-Scholes sullo stesso periodo

Invece il modello di Black-Scholes parte dall'ipotesi che la volatilità è **costante** nel tempo.

L'effetto Smile della Volatilità

La volatilità implicita nei prezzi delle opzioni quotate sul mercato non è assolutamente costante ma varia in funzione del prezzo di esercizio e della scadenza $\Rightarrow$ **Smile della volatilità**.

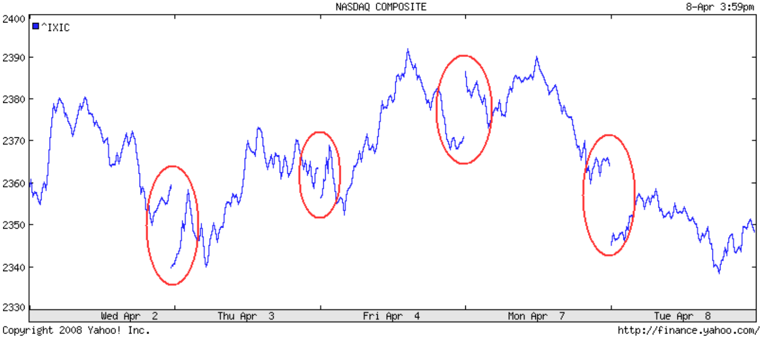


Lo "Smile Surface" della volatilità per un set di opzioni sull'indice S&P500

Evidenza dei Salti nelle Quotazioni

È chiaro che l'andamento dei prezzi non segue un processo continuo. $\Rightarrow$ C'è una chiara presenza di **salti** nei prezzi, come il famoso gap intergiornaliero presente in tutti i maggiori indici azionari.

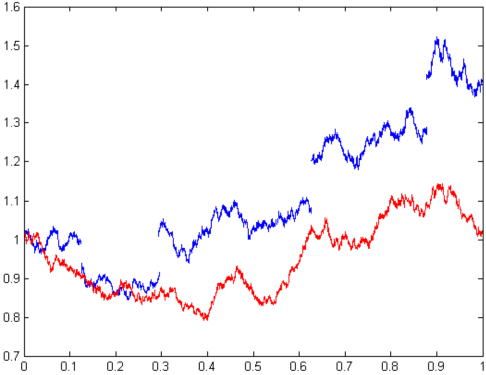
$\Rightarrow$ Importante fonte di **rischio**



Esempio di "gap" giornalieri sull'indice NASDAQ dal 2 al 8 aprile 2008

Moto Browniano Vs. Processo di Lévy con Salti

Visto il precendete grafico, quale processo rappresenta meglio il vero andamento dei prezzi?



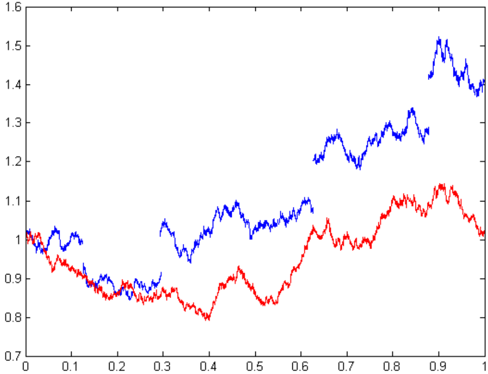
⟵ Lévy Jump-Diffusion

⟵ Moto Browniano (B-S)

I processi di Lévy sono quindi capaci di integrare i **salti** nei modelli di prezzaggio di opzioni.

Moto Browniano Vs. Processo di Lévy con Salti

Visto il precendete grafico, quale processo rappresenta meglio il vero andamento dei prezzi?



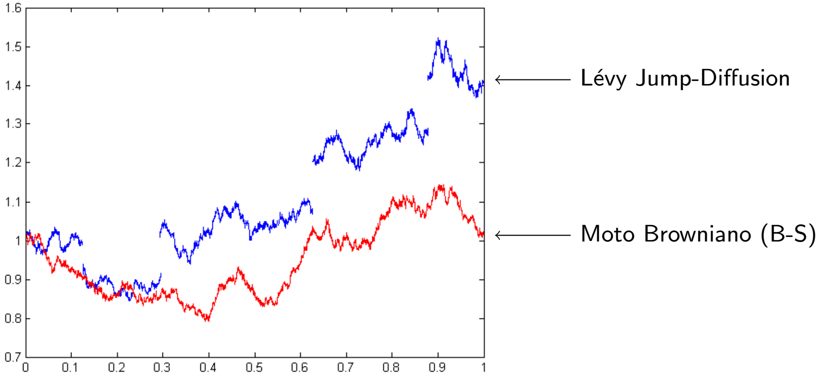
Lévy Jump-Diffusion

Moto Browniano (B-S)

I processi di Lévy sono quindi capaci di integrare i **salti** nei modelli di prezzaggio di opzioni.

Moto Browniano Vs. Processo di Lévy con Salti

Visto il precendete grafico, quale processo rappresenta meglio il vero andamento dei prezzi?



I processi di Lévy sono quindi capaci di integrare i **salti** nei modelli di prezzaggio di opzioni.

Proprietà dei Processi di Lévy

Ma come si possono definire i processi di Lévy?

I processi di Lévy sono processi stocastici in tempo continuo caratterizzati da incrementi **indipendenti** e **stazionari**.

$\Rightarrow$ Sono l'analogo del *Random Walk* in tempo continuo.

Scomposizione di Lévy-Itô

Un processo di Lévy può essere scomposto in 3 elementi (è possibile che uno o due di questi elementi sia uguale a 0):

- una parte **deterministica** (un *drift*)
- un moto **Browniano** (una *diffusione*)
- una composizione di processi di **Poisson** (dei *salti*)

Secondo la formula di *Lévy-Khintchine*, la *funzione caratteristica* di un processo di Lévy può sempre essere **determinata**.

Proprietà dei Processi di Lévy

Ma come si possono definire i processi di Lévy?

I processi di Lévy sono processi stocastici in tempo continuo caratterizzati da incrementi **indipendenti** e **stazionari**.

$\Rightarrow$ Sono l'analogo del *Random Walk* in tempo continuo.

Scomposizione di Lévy-Itô

Un processo di Lévy può essere scomposto in 3 elementi (è possibile che uno o due di questi elementi sia uguale a 0):

- una parte **deterministica** (un *drift*)
- un moto **Browniano** (una *diffusione*)
- una composizione di processi di **Poisson** (dei *salti*)

Secondo la formula di *Lévy-Khintchine*, la *funzione caratteristica* di un processo di Lévy può sempre essere **determinata**.

Proprietà dei Processi di Lévy

Ma come si possono definire i processi di Lévy?

I processi di Lévy sono processi stocastici in tempo continuo caratterizzati da incrementi **indipendenti** e **stazionari**.

$\Rightarrow$ Sono l'analogo del *Random Walk* in tempo continuo.

Scomposizione di Lévy-Itô

Un processo di Lévy può essere scomposto in 3 elementi (è possibile che uno o due di questi elementi sia uguale a 0):

- una parte **deterministica** (un *drift*)
- un moto **Browniano** (una *diffusione*)
- una composizione di processi di **Poisson** (dei *salti*)

Secondo la formula di *Lévy-Khintchine*, la *funzione caratteristica* di un processo di Lévy può sempre essere **determinata**.

I Processi Esponenziali di Lévy

Utilizziamo modelli basati sull'**esponenziale** di un processo di **Lévy**:

$$S_t = S_0 \exp(L_t)$$

dove L_t è un processo di Lévy che può essere del tipo:

Jump-Diffusion

composto da una **diffusione** (moto Browniano) e da **salti** ad intervalli **casuali** (regolati da un processo di Poisson).
⇒ Normal Jump-Diffusion e Double-Exponential Jump-Diffusion.

Infinite-Activity Pure-Jump

composto da un numero **infinito** di **salti** in ogni intervallo di tempo (non c'è quindi bisogno di una parte Browniana).
⇒ Variance Gamma e Normal Inverse Gaussian.

L_t può avere o no una parte deterministica (drift).

I Processi Esponenziali di Lévy

Utilizziamo modelli basati sull'**esponenziale** di un processo di **Lévy**:

$$S_t = S_0 \exp(L_t)$$

dove L_t è un processo di Lévy che può essere del tipo:

Jump-Diffusion

composto da una **diffusione** (moto Browniano) e da **salti** ad intervalli **casuali** (regolati da un processo di Poisson).
$\Rightarrow$ Normal Jump-Diffusion e Double-Exponential Jump-Diffusion.

Infinite-Activity Pure-Jump

composto da un numero **infinito** di **salti** in ogni intervallo di tempo (non c'è quindi bisogno di una parte Browniana).
$\Rightarrow$ Variance Gamma e Normal Inverse Gaussian.

L_t può avere o no una parte deterministica (drift).

I Processi Esponenziali di Lévy

Utilizziamo modelli basati sull'**esponenziale** di un processo di **Lévy**:

$$S_t = S_0 \exp(L_t)$$

dove L_t è un processo di Lévy che può essere del tipo:

Jump-Diffusion

composto da una **diffusione** (moto Browniano) e da **salti** ad intervalli **casuali** (regolati da un processo di Poisson).
$\Rightarrow$ Normal Jump-Diffusion e Double-Exponential Jump-Diffusion.

Infinite-Activity Pure-Jump

composto da un numero **infinito** di **salti** in ogni intervallo di tempo (non c'è quindi bisogno di una parte Browniana).
$\Rightarrow$ Variance Gamma e Normal Inverse Gaussian.

L_t può avere o no una parte deterministica (drift).

I Processi Esponenziali di Lévy

Utilizziamo modelli basati sull'**esponenziale** di un processo di **Lévy**:

$$S_t = S_0 \exp(L_t)$$

dove L_t è un processo di Lévy che può essere del tipo:

Jump-Diffusion

composto da una **diffusione** (moto Browniano) e da **salti** ad intervalli **casuali** (regolati da un processo di Poisson).
$\Rightarrow$ Normal Jump-Diffusion e Double-Exponential Jump-Diffusion.

Infinite-Activity Pure-Jump

composto da un numero **infinito** di **salti** in ogni intervallo di tempo (non c'è quindi bisogno di una parte Browniana).
$\Rightarrow$ Variance Gamma e Normal Inverse Gaussian.

L_t può avere o no una parte deterministica (drift).

Prezzaggio di Opzioni

Visto che il mercato generato dai modelli di *Lévy* è **incompleto**, non possiamo utilizzare il principio della replicazione di un portafoglio alla base del prezzaggio con Black-Scholes. $\Rightarrow$ Invece:

- La *funzione caratteristica* di un processo di Lévy è sempre **determinabile**, anche se la funzione di densità non lo è.
- Possiamo quindi applicare i metodi basati sulla *Trasformata di Fourier* per ricavare i prezzi di opzioni.

Ci basiamo quindi sulla:

Formula di Prezzaggio Neutrale al Rischio

$$C_t = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+|\mathcal{F}_t]$$

Prezzaggio di Opzioni

Visto che il mercato generato dai modelli di *Lévy* è **incompleto**, non possiamo utilizzare il principio della replicazione di un portafoglio alla base del prezzaggio con Black-Scholes. $\Rightarrow$ Invece:

- La *funzione caratteristica* di un processo di Lévy è sempre **determinabile**, anche se la funzione di densità non lo è.
- Possiamo quindi applicare i metodi basati sulla *Trasformata di Fourier* per ricavare i prezzi di opzioni.

Ci basiamo quindi sulla:

Formula di Prezzaggio Neutrale al Rischio

$$C_t = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+|\mathcal{F}_t]$$

Prezzaggio di Opzioni

Visto che il mercato generato dai modelli di *Lévy* è **incompleto**, non possiamo utilizzare il principio della replicazione di un portafoglio alla base del prezzaggio con Black-Scholes. $\Rightarrow$ Invece:

- La *funzione caratteristica* di un processo di Lévy è sempre **determinabile**, anche se la funzione di densità non lo è.
- Possiamo quindi applicare i metodi basati sulla *Trasformata di Fourier* per ricavare i prezzi di opzioni.

Ci basiamo quindi sulla:

Formula di Prezzaggio Neutrale al Rischio

$$C_t = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

Prezzaggio di Opzioni

Visto che il mercato generato dai modelli di *Lévy* è **incompleto**, non possiamo utilizzare il principio della replicazione di un portafoglio alla base del prezzaggio con Black-Scholes. $\Rightarrow$ Invece:

- La *funzione caratteristica* di un processo di Lévy è sempre **determinabile**, anche se la funzione di densità non lo è.
- Possiamo quindi applicare i metodi basati sulla *Trasformata di Fourier* per ricavare i prezzi di opzioni.

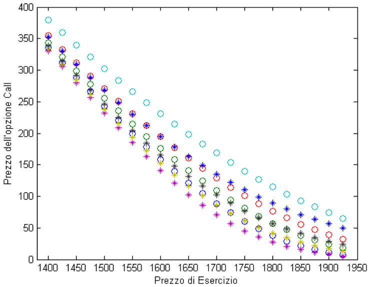
Ci basiamo quindi sulla:

Formula di Prezzaggio Neutrale al Rischio

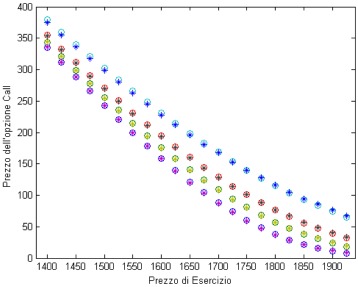
$$C_t = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

Calibrazione dei Modelli

Grazie al metodo dei *minimi quadrati non lineari*, ricaviamo i parametri dei modelli dai prezzi di opzioni quotate sul mercato.



Fitting NDX con Black-Scholes



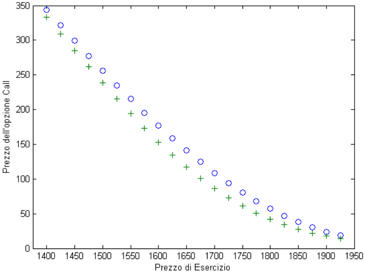
Fitting NDX con Normal Inverse Gaussian

○ : Prezzi di mercato

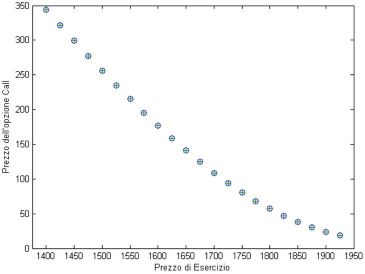
✳ : Prezzi ricavati con il modello

Fitting Perfetto su una Scadenza

Invece, se proviamo a calibrare un set di opzioni con diversi prezzi di esercizio ma un'unica scadenza, otteniamo addirittura un fitting perfetto dei prezzi di mercato.



Fitting NDX con Black-Scholes



Fitting NDX con Variance Gamma

mentre il modello di Black-Scholes fornisce prezzi decisamente sbagliati.

Creato con LATEX